Giornata di studio

ANALISI NON STANDARD NELLE SCUOLE SUPERIORI

Venezia, 29 settembre 2013

LA FORMULA DI SOSTITUZIONE NEGLI INTEGRALI

Giorgio Goldoni

ITIS "Leonardo da Vinci" - Carpi (MO)

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Nell'analisi con gli infinitesimi è possibile restituire al simbolo di integrale la dignità di espressione formata da una somma infinita di prodotti infinitesimi e non si è costretti a doverlo considerare, come nell'analisi classica, una notazione monolitica in cui le varie parti sono singolarmente prive di significato e sopravvivono solo come fossili dell'era infinitesimale.

Molte trattazioni dell'analisi non standard sono "anfibie", nel senso che, pur usando gli infinitesimi e gli infiniti, continuano a seguire sostanzialmente lo stesso percorso dell'analisi classica e a imitarne persino le definizioni, invece di riscoprire il percorso più diretto e naturale del vecchio calcolo infinitesimale.

Per esempio, grazie agli infinitesimi, è possibile definire il differenziale di una funzione continua nel punto *x* e relativo all'incremento infinitesimo non nullo secondo l'antico e semplice significato di incremento:

$$df(x) = f(x + dx) - f(x)$$

Nel caso poi in cui sia anche derivabile in *x*, allora, essendo

$$f'(x) = st\left[\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}\right] = st\left[\frac{df(x)}{dx}\right]$$

si ha che

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) + \varepsilon$$

da cui

$$df(x) = f'(x)\,dx + \varepsilon\,dx$$

Il differenziale è *indistinguibile* dal prodotto della derivata per l'incremento dx:

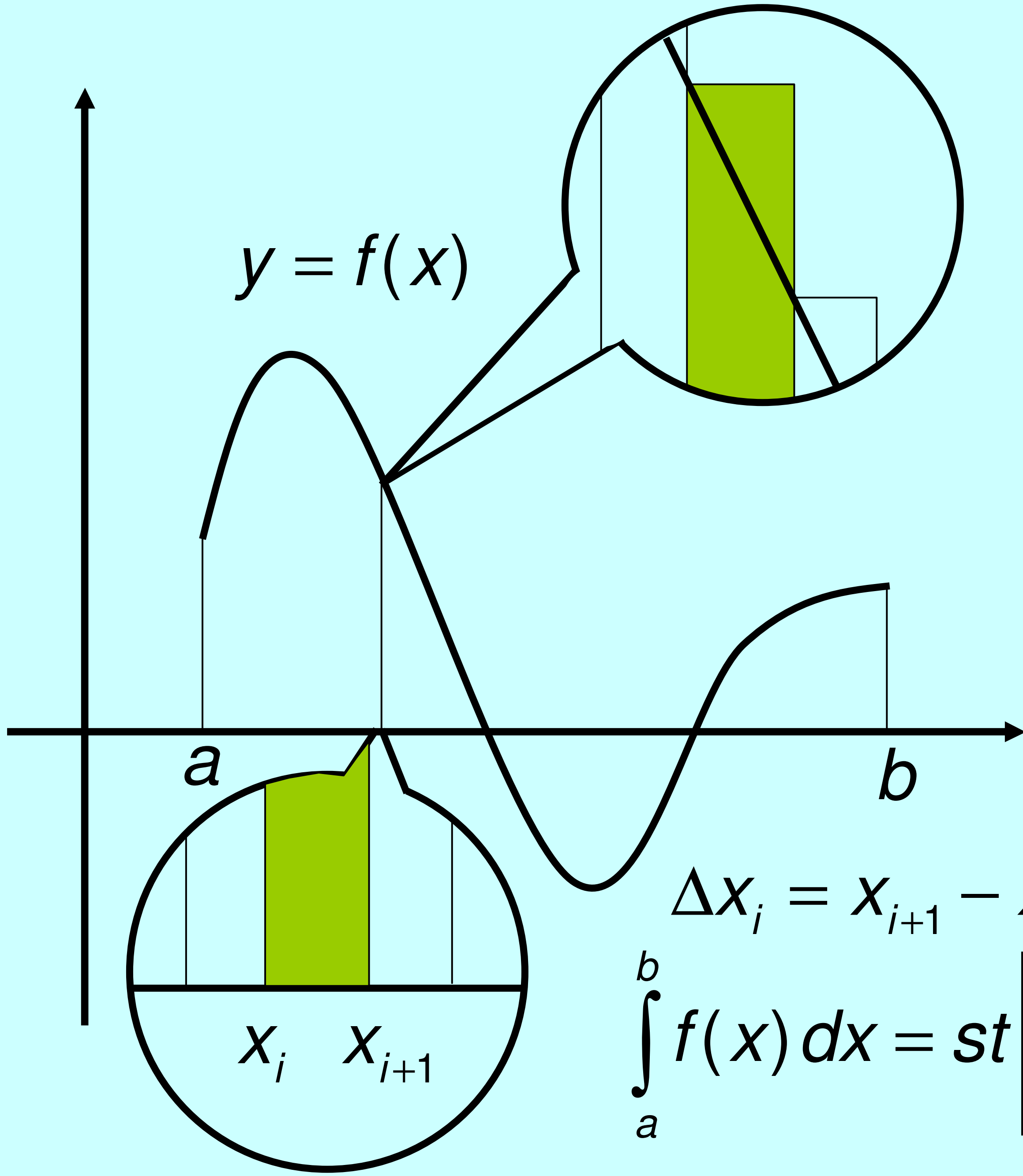
$$df(x) \sim f'(x)\,dx$$

Eppure nella quasi totalità dei testi di NSA il differenziale (a parte l'incremento *dx* infinitesimo) viene definito come nell'analisi classica!

$$df(x) = f'(x)\,dx$$

Riguardo alla definizione di integrale, trovo insoddisfacente il formalismo utilizzato per la sua definizione, che, a mio avviso, non rende sufficientemente giustizia alla notazione di Leibniz.

$$\int_a^b f(x)\,dx = st\left[\sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)\,\Delta x_i\right]$$



$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = st\left[\sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)\,\Delta x_i\right]$$

Data una funzione limitata $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, per ogni suddivisione dell'intervallo $[a,b]$ in un numero infinito N di parti infinitesime mediante i punti di suddivisione

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$$

si considera la somma

$$\sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)\,\Delta x_i$$

dove $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$

Se accade che tale somma sia finita e abbia sempre la stessa parte standard, indipendentemente dalla suddivisione, (cosa che accade ad esempio per le funzioni continue) si definisce allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = st\left[\sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)\,\Delta x_i\right]$$

"L'idea fondamentale del calcolo integrale è quella di esprimere l'intero come somma di infinite parti infinitamente piccole. Ogni parte infinitesima racchiude però la stessa difficoltà di calcolo dell'intero e il passo decisivo è quello di sostituire ogni parte infinitesima con una indistinguibile più semplice, in modo da riuscire a portare a termine il calcolo ottenendo un risultato infinitamente vicino a quello esatto."

PROPOSTA PER RESTITUIRE AL SIMBOLO DI INTEGRALE IL SIGNIFICATO DI SOMMA E PER POTERLO MANIPOLARE ALLA LEIBNIZ.

1) Indico la somma di un numero infinito N di infinitesimi con

$$\int_1^N \varepsilon_i$$

invece che con

$$\sum_1^N \varepsilon_i$$

e lo chiamo già integrale degli , riservando il simbolo di sommatoria al caso in cui gli addendi di indice finito siano non infinitesimi, come nel caso delle serie.

2) Ricavo (o più semplicemente enuncio) il teorema che afferma che se

$$\varepsilon_i \sim \delta_i$$

allora si ha che

$$\int_1^N \varepsilon_i \sim \int_1^N \delta_i$$

In particolare, se

$$\int_1^N \varepsilon_i$$

è finito, allora

$$\int_1^N \varepsilon_i \simeq \int_1^N \delta_i$$

3) Per ogni suddivisione dell'intervallo [*a, b*] in infinite parti infinitesime mediante i punti

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_N = b$$

indico con dx_i la differenza infinitesima $x_{i+1} - x_i$, che chiamo differenziale, riservando il simbolo Δx_i al caso di differenze standard o comunque non infinitesime.

4) Enuncio il teorema che afferma che per una funzione continua, per ogni suddivisione dell'intervallo di definizione in infinite parti infinitesime, si ha che l'integrale

$$\int_{0}^{N-1} f(x_i)\, dx_i$$

ha sempre la stessa parte standard.

5) Quando mi riferisco alle parti standard, convengo di scrivere

$$a = b$$

invece di

$$a \simeq b$$

6) Essendo la parte standard di

$$\int_{0}^{N-1} f(x_i)\, dx_i$$

indipendente da N e dalla particolare suddivisione, ma dipendendo solo da f e dall'intervallo $[a,b]$, uso la scrittura neutra

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

la quale eredita tutte le proprietà degli integrali relativi una suddivisione, indicando appunto una qualsiasi di queste somme che, ai fini della parte standard, risultano tra loro equivalenti.

LA FORMULA DI SOSTITUZIONE PER GLI INTEGRALI

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(\varphi(t))\left|\varphi'(t)\right| dt$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

Comincio con un caso particolare…

$$\int_a^b f(x)\,dx, \quad x = 2t$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = 2\int_{a/2}^{b/2} f(2t)\ dt$$

Considero la funzione

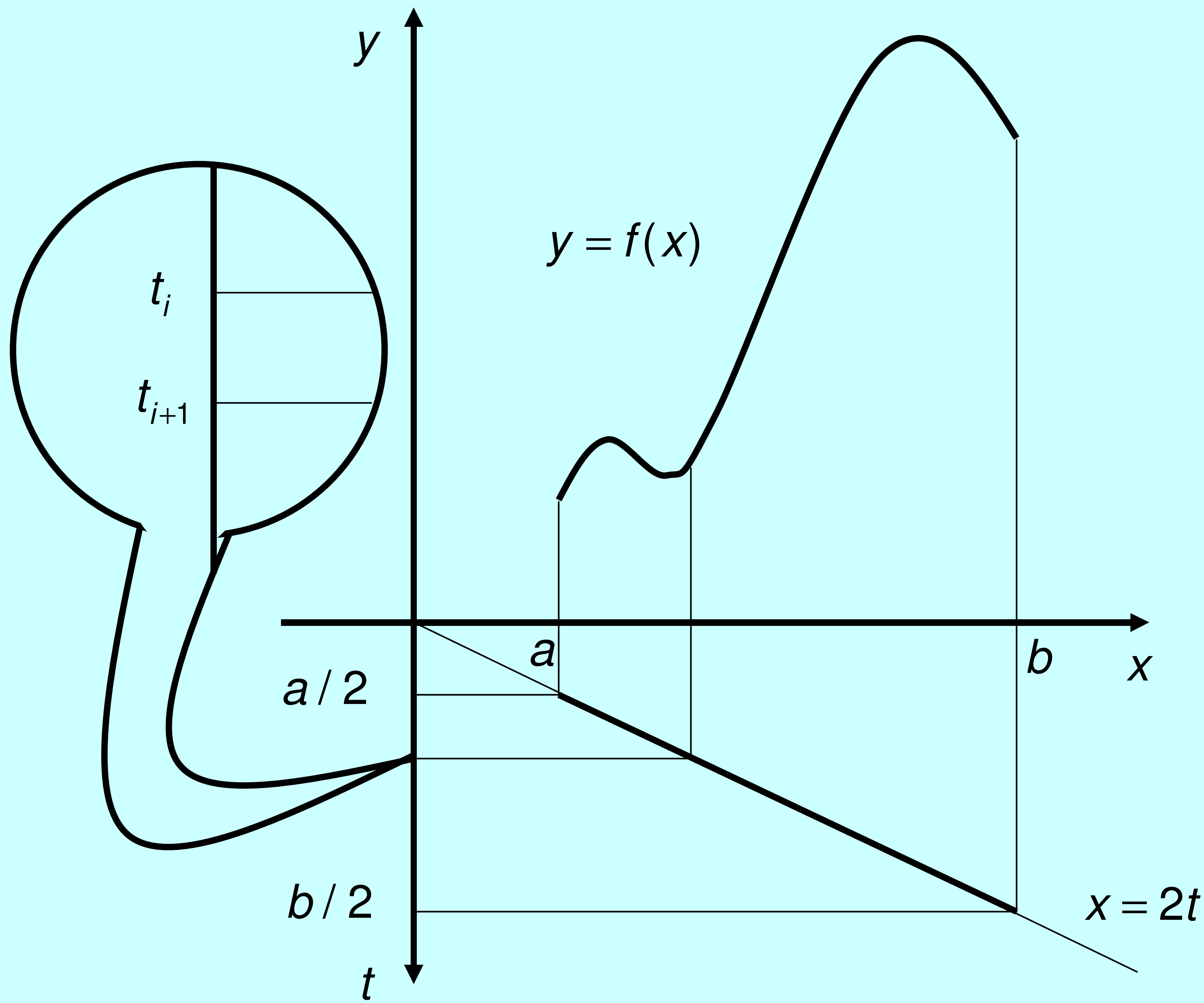
$$\varphi : \left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right] \to [a, b], \quad \varphi(t) = 2t$$

che manda ogni suddivisione

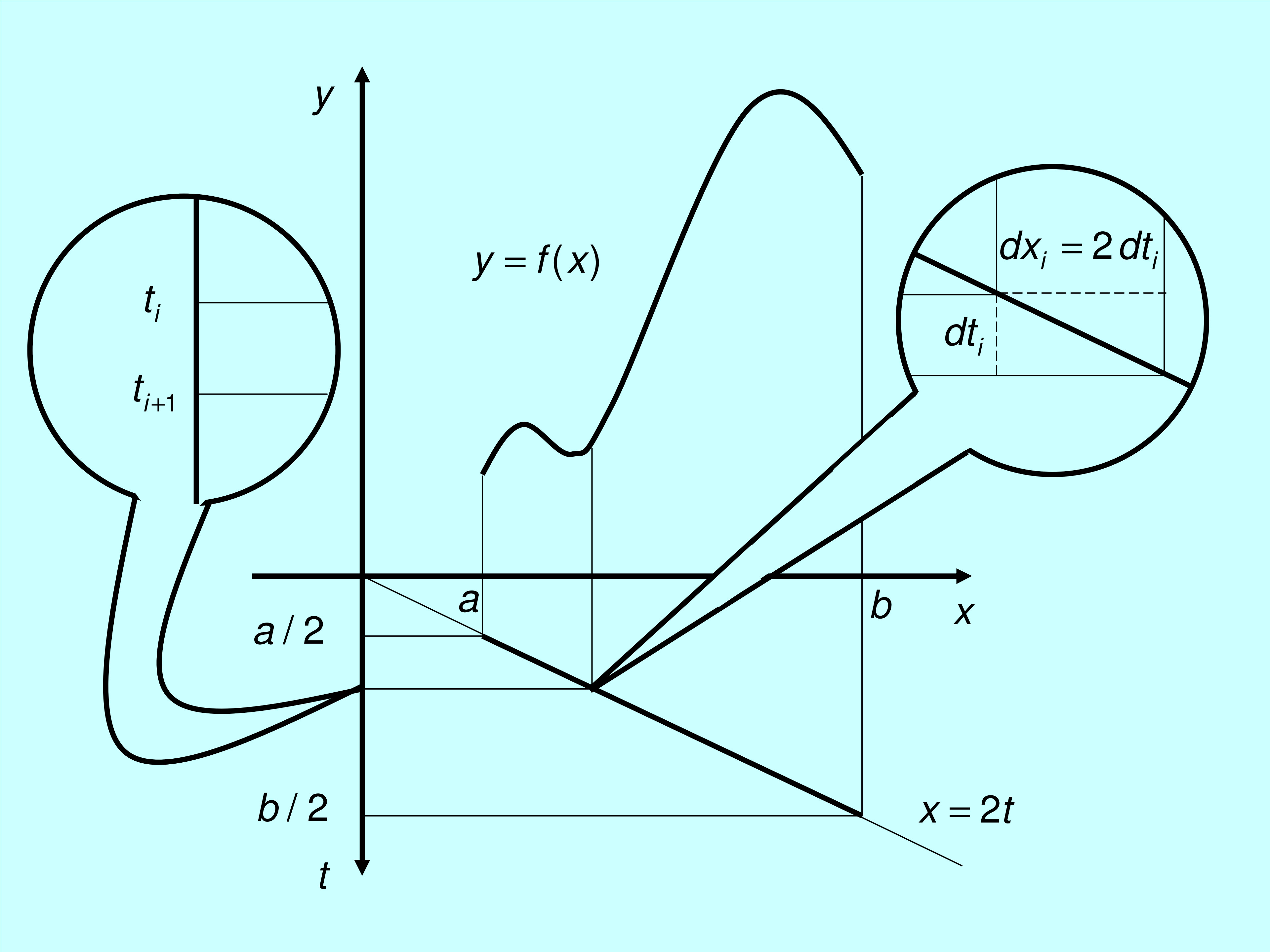
$$\frac{a}{2} = t_0 < t_1 < t_2 < \ ... < t_N = \frac{b}{2}$$

in una suddivisione

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_N = b$$



y
y = f(x)
t_i
t_{i+1}
a
b
x
a / 2
b / 2
x = 2t
t



y
y = f(x)
t_i
t_{i+1}
dx_i = 2 dt_i
dt_i
a
b
x
a / 2
b / 2
x = 2t
t

La retta $y = 2t$ dilata ogni intervallo $[t_i,\ t_{i+1}]$

di ampiezza dt_i nell'intervallo $[x_i,\ x_{i+1}]$

di ampiezza dx_i , per cui

$$dx_i = 2dt_i \qquad f(x_i)\,dx_i = f(\varphi(t_i))\,2\,dt_i$$

$$\int_0^{N-1} f(x_i)\,dx_i = 2\int_0^{N-1} f(2t_i)\,dt_i$$

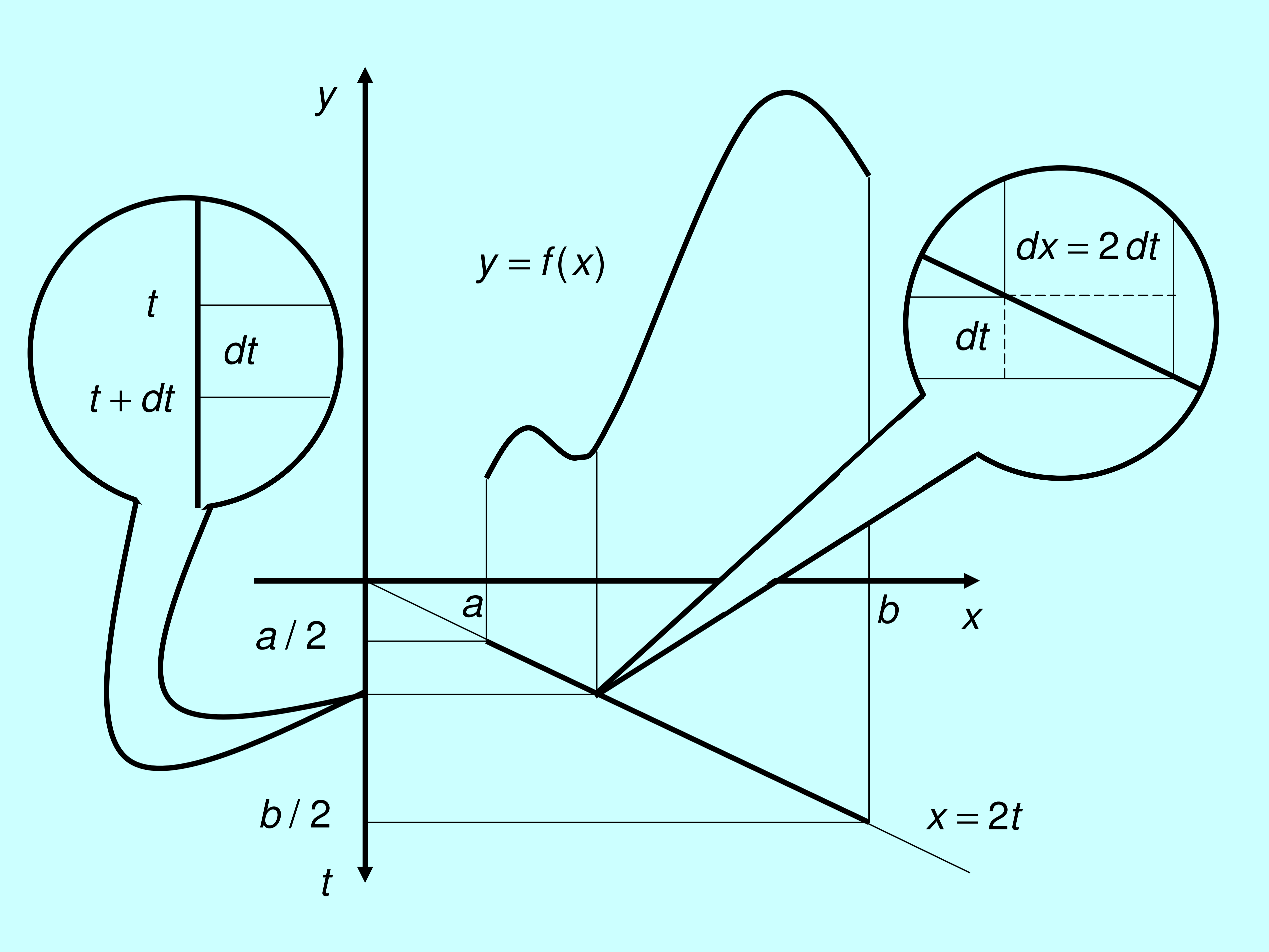
$$\int_a^b f(x)\,dx = 2\int_{a/2}^{b/2} f(2t)\,dt$$

Poiché $\int_a^b f(x)\,dx$ sta per un generico $\int_0^{N-1} f(x_i)\,dx_i$

possiamo scrivere

$$dx = 2dt, \quad f(x)\,dx = f(\varphi(t))\,dt$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a/2}^{b/2} f(\varphi(t))\,dt$$

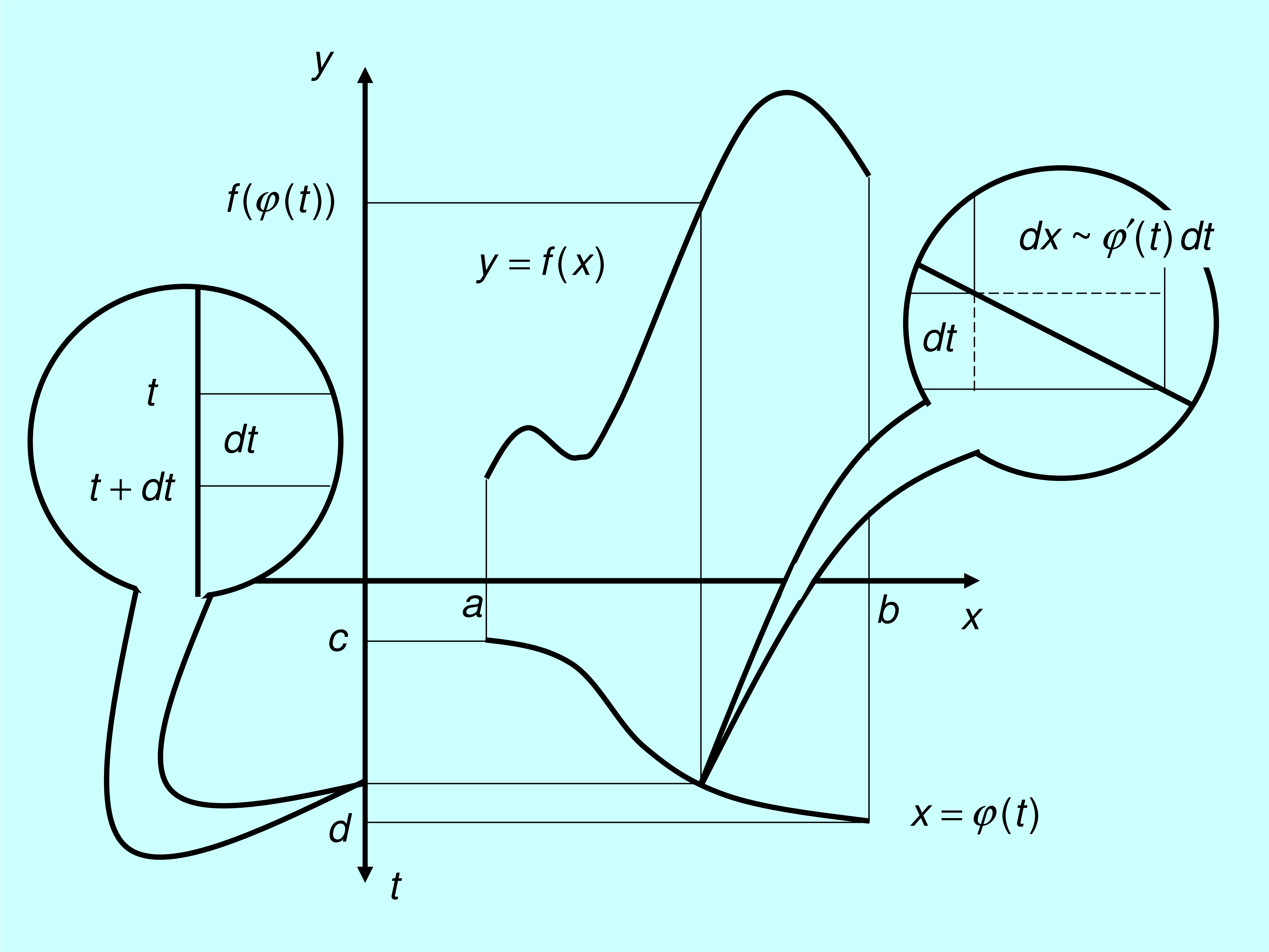


y
y = f(x)
t
dt
t + dt
dx = 2 dt
dt
a
b
x
a / 2
b / 2
x = 2t
t

Passo poi al caso più generale della sostituzione

$x = \varphi(t)$ dove $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ è una

funzione con derivata positiva



y
f(φ(t))
y = f(x)
dx ~ φ′(t) dt
dt
t
dt
t + dt
a
b
x
c
d
t
x = φ(t)

$$x = \varphi(t)$$

$$dx \sim \varphi'(t)\,dt$$

$$f(x)\,dx \sim f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,\ \ se\ \ a > b$$

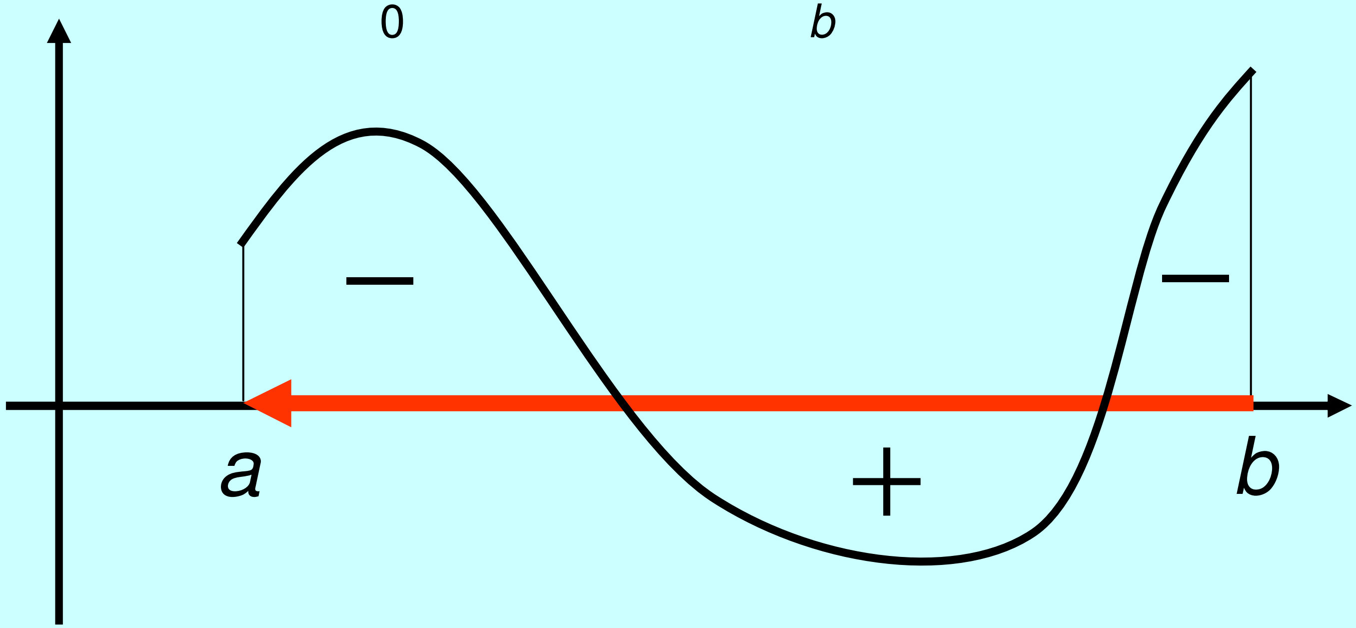
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(\varphi(t))\left|\varphi'(t)\right|dt$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

$$b = x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_N = a$$

$$\int_0^{N-1} f(x_i)\, dx_i = \int_b^a f(x)\, dx$$



Il professor Apotema insegna… IL CALCOLO DELLE SOMME E IL CALCOLO INTEGRALE

www.ilmiolibro.it